

BULLETIN N° 180
ACADÉMIE EUROPEENNE
INTERDISCIPLINAIRE
DES SCIENCES



lundi 2 décembre à 17h Maison de l'AX 5 rue Descartes 75005 Paris

"La dualité onde-particule au programme d'Einstein"

par notre Collègue Claude ELBAZ

Réflexions sur la finalisation du prochain Colloque :

"Formation des Systèmes stellaires et planétaires Conditions d'apparition de la vie"

Prochaine séance :

lundi 6 janvier à 17h Maison de l'AX 5 rue Descartes 75005 Paris

Une interprétation synthétique: "la théorie de la double préparation"

par notre Collègue Michel GONDRAN

Ancien conseiller scientifique EDF/Université Paris-Dauphine

Réflexions sur la finalisation du prochain Colloque :

"Formation des Systèmes stellaires et planétaires Conditions d'apparition de la vie"

ACADEMIE EUROPEENNE INTERDISCIPLINAIRE DES SCIENCES

FONDATION DE LA MAISON DES SCIENCES DE L'HOMME

PRESIDENT : Pr Victor MASTRANGELO
VICE PRESIDENT : Pr Jean-Pierre FRANÇOISE
SECRETAIRE GENERAL : Irène HERPE-LITWIN
TRESORIER GENERAL : Claude ELBAZ

MEMBRES CONSULTATIFS DU CA :
 Gilbert BELAUBRE
 François BEGON
 Bruno BLONDEL
 Patrice CROSSA-REYNAUD
 Michel GONDRAN

SECTION DE NICE :
PRESIDENT : Doyen René DARS

PRESIDENT FONDATEUR : Dr. Lucien LEVY (†)
PRESIDENT D'HONNEUR : Gilbert BELAUBRE
SECRETAIRE GENERAL D'HONNEUR : Pr. P. LIACOPOULOS (†)

CONSEILLERS SCIENTIFIQUES :
SCIENCES DE LA MATIERE : Pr. Gilles COHEN-TANNOUJJI
SCIENCES DE LA VIE ET BIOTECHNIQUES : Pr Brigitte DEBUIRE

CONSEILLERS SPECIAUX:
EDITION: Pr Robert FRANCK
AFFAIRES EUROPEENNES : Pr Jean SCHMETS
RELATIONS VILLE DE PARIS et IDF: Michel GONDRAN ex
 PRESIDENT
RELATIONS UNIVERSITES
 et **MOYENS MULTIMEDIA**: Pr Alain CORDIER
RELATIONS AX: Gilbert BELAUBRE

SECTION DE NANCY :
PRESIDENT : Pr Pierre NABET

décembre 2013

N°180

TABLE DES MATIERES

p.03 Compte-rendu de la séance du lundi 2 décembre 2013
 p. 12 Annonces
 P. 16 Documents

Prochaine séance :
lundi 6 janvier à 17h Maison de l'AX 5 rue Descartes 75005 Paris

Une interprétation synthétique: "la théorie de la double préparation"
par notre Collègue Michel GONDRAN

Ancien conseiller scientifique EDF/Université Paris-Dauphine

Réflexions sur la finalisation du prochain Colloque :

"Formation des Systèmes stellaires et planétaires Conditions d'apparition de la vie"

ACADEMIE EUROPEENNE INTERDISCIPLINAIRE DES SCIENCES
Fondation de la Maison des Sciences de l'Homme, Paris.

Séance du

Lundi 6décembre 2013

Maison de l'AX 17h

La séance est ouverte à 17h sous la Présidence de Victor MASTRANGELO et en la présence de nos Collègues Gilbert BELAUBRE, Alain CARDON, Gilles COHEN-TANNOUDJI, Françoise DUTHEIL, Claude ELBAZ, Jean -Pierre FRANCOISE , Gérard LEVY, Michel GONDRAN, Irène HERPE-LITWIN, Pierre MARCHAIS, Pierre PESQUIES, Jean SCHMETS, Alain STAHL

Etaient excusés François BEGON, Bruno BLONDEL, Michel CABANAC, Alain CORDIER, Daniel COURGEAU, Robert FRANCK, Walter GONZALEZ, Jacques LEVY , Valérie LEFEVRE-SEGUIN , Jean VERDETTI.

I. "*La dualité onde-particule au programme d'Einstein*" Exposé de notre Collègue **Claude ELBAZ**

A) Notre collègue nous a confié ci-dessous un résumé suivi d'un exposé détaillé:

Le problème des dualités onde-particule et matière-lumière, au cours des siècles, a divisé d'abord les philosophes, puis les physiciens.

Le modèle standard de la physique, qui a été validé par la mise en évidence expérimentale du boson de Higgs, aurait tranché en faveur des particules, non, seulement pour la matière mais également pour la lumière, et plus généralement, pour les forces d'interactions. Il forme un système cohérent pour la description de l'univers, en prolongement de la mécanique quantique, qui a privilégié la particule discontinue, en s'appuyant sur des équations mathématiques abstraites.

Mais le modèle standard ne décrit qu'un aspect de l'univers. Par exemple, il n'intègre pas la gravitation : il est postérieur à l'ère de Planck. De plus, le terme de boson rappelle qu'il s'agit d'une particule quantique, qui se comporte à la fois comme une onde et comme une particule. Enfin, le boson n'est que la manifestation d'un champ continu plus fondamental.

Par conséquent, le problème des dualités, onde-particule pour la matière, et matière-lumière, à travers des interactions de masse nulle, est loin d'être entièrement résolu.

En prolongement de ses découvertes, Einstein avait proposé, dans son programme, une approche symétrique, et cohérente: il privilégiait le champ continu, en s'appuyant sur des images représentatives pour les phénomènes physiques, avant une description mathématique plus précise.

Il permet de compléter et d'unifier la description de l'univers, un peu comme les deux yeux rendent possible la vision en relief, ou les deux oreilles l'écoute stéréophonique. Nous nous proposons de le montrer par plusieurs exemples simples.

[Nous vous rappelons que dans le dernier bulletin (n° 179 novembre 2013 page 29) notre Collègue nous avait confié un article exhaustif sur le sujet exposé].

B) Exposé détaillé:

La dualité onde-particule au programme d'Einstein.

1-Introduction.

Le problème des dualités onde-particule et matière-lumière, a, au cours des siècles, divisé d'abord les philosophes, puis les physiciens.

Le modèle standard de la physique, qui a été validé par la mise en évidence expérimentale du boson B E H, aurait tranché en faveur des particules, non seulement pour la matière mais également pour la lumière, et plus généralement, pour les forces d'interactions. Il forme un système cohérent pour la description de l'univers, en prolongement de la mécanique quantique, qui a privilégié la particule discontinue, en s'appuyant sur des équations mathématiques abstraites.

Mais le modèle standard ne décrit qu'un aspect de l'univers. Par exemple, il n'intègre pas la gravitation : il est postérieur à l'ère de Planck. De plus, le terme de boson rappelle qu'il s'agit d'une particule quantique, qui se comporte à la fois comme une onde et comme une particule. Enfin, le boson n'est que la manifestation d'un champ continu plus fondamental.

Par conséquent, le problème des dualités, onde-particule pour la matière, et matière-lumière, à travers des interactions de masse nulle, est loin d'être entièrement résolu.

En prolongement de ses découvertes, Einstein avait proposé, dans son programme, une approche symétrique, et cohérente: il privilégiait le champ continu, en s'appuyant sur des images représentatives pour les phénomènes physiques, avant une description mathématique plus précise. Il permet de compléter et d'unifier la description de l'univers, un peu comme les deux yeux rendent possible la vision en relief, ou les deux oreilles l'écoute stéréophonique. Nous proposons de le montrer par plusieurs exemples simples.

2- Historique.

2.1 Les particules.

Dès l'antiquité, Démocrite avait considéré que « L'univers est constitué d'atomes et de vide. Les atomes représentent le stade ultime de la division de la matière. Ce sont des corpuscules solides et indivisibles, séparés par des intervalles vides.» Deux millénaires plus tard, Newton écrivait : «..il me paraît très probable que Dieu forma au commencement la matière de particules solides, pesantes, dures, impénétrables, mobiles.... Les particules ne remplissent pas l'espace. Elles sont séparées par du vide.» Aujourd'hui, avec le modèle standard, on admet que toutes les particules de matière ont été créées à l'époque de la nucléosynthèse primordiale, il y a 13,7 milliards d'années, moins de trois minutes après le Big Bang.

En résumé, le concept de particule de matière est caractérisé par une double discontinuité, dans l'espace et dans le temps. Dans l'espace, en délimitant un domaine intérieur « plein » et un domaine extérieur « vide ». Dans le temps, en délimitant un temps antérieur à leur création, et un temps postérieur, pendant lequel elles sont présentes.

2.2 Les Champs et les ondes.

D'un autre côté, dès l'antiquité également, Aristote avait considéré que « L'univers est constitué d'un milieu continu, la *quinte-essence*, et que la *Nature a horreur du vide* ». Deux millénaires plus tard, pour Descartes « La matière est un fluide continu, homogène, caractérisé par son étendue, et qui emplit tout l'univers...Il n'y a donc qu'une même matière dans tout l'univers, et nous la connaissons par cela qu'elle est étendue. »

Plus tard, quand le champ a été introduit en physique, il a commencé par exprimer la force qui s'exerce instantanément, en chaque point de l'espace à travers le vide, entre des masses ou des charges électriques. Mais la détection d'une vitesse de propagation pour la lumière, puis sa propriété de se

propager de proche en proche dans l'espace sous la forme d'ondes, a conduit à attribuer une nature physique au vide : l'éther électromagnétique.

La théorie de la relativité restreinte de 1905 avait permis à Einstein de supprimer le recours à l'éther électromagnétique pour remplir le vide. Mais l'élaboration de la relativité générale en 1915 l'avait conduit à refaire jouer un rôle fondamental à l'espace. « L'espace vide n'est ni homogène, ni isotrope,...ces faits ont définitivement écarté la conception que l'espace serait physiquement vide. Par là, la notion d'éther a de nouveau acquis un contenu précis, contenu certes qui diffère notablement de celui de l'éther de la théorie ondulatoire mécanique de la lumière. L'éther de la théorie de la relativité générale est un milieu privé de toutes les propriétés mécaniques et cinématiques, mais qui détermine les phénomènes mécaniques et électromagnétiques. » [A Einstein, L'éther et la théorie de la relativité, (conférence fait à l'Université de Leyde 1920).

Actuellement, dans le modèle standard, « le vide d'une théorie quantique des champs peut vraiment être assimilé à un milieu complexe dans lequel les champs quantiques sont le siège de fluctuations dont les effets physiques peuvent être observables.» [Gilles Cohen-Tannoudji et Michel Spiro, Le boson et le chapeau mexicain, p 276, 347]

En résumé, à la différence du concept de champ, qui exprime une interaction directe entre particules, le concept d'onde fait jouer un rôle essentiel au milieu et à la vitesse de propagation : une onde continue à se propager alors même que son origine localisée a disparu, comme le rayonnement fossile cosmologique, détecté après un parcours 13,7 milliards d'années-lumière.

2 3 Les dualités onde-particule et matière-lumière.

Avec Einstein, la physique classique relativiste inclut la gravitation mais pas la quantification. Avec le modèle standard, la physique quantique relativiste inclut la quantification mais pas la gravitation. Mais dans les deux cas, les concepts de particules, discontinues, localisées dans le temps et l'espace, et d'ondes, continues, et réparties dans le temps et l'espace, subsistent.

Ainsi, le modèle standard d'une part, et la relativité générale d'autre part, ne décrivent chacun qu'un aspect de l'univers. Chacun forme un système physiquement et formellement cohérent, qui a été validé par l'expérience avec une très grande précision. Le modèle standard prolonge la mécanique quantique, qui a privilégié la particule discontinue, en s'appuyant sur des équations mathématiques abstraites. Le programme d'Einstein propose une approche symétrique, et cohérente: il prolonge la relativité générale en privilégiant le champ continu, et en s'appuyant sur des images représentatives pour les phénomènes physiques, avant une description mathématique plus précise.

Les deux approches sont complémentaires. Elles permettent d'unifier la description de l'univers, un peu comme les deux yeux rendent possible la vision en relief, ou les deux oreilles l'écoute stéréophonique.

Le modèle standard, d'une part, et le programme d'Einstein d'autre part, doivent être considérés comme deux systèmes cohérents de perception des phénomènes physiques, à la manière de ceux constatés séparément par deux observateurs relativistes, dont l'un serait entraîné par un train en mouvement, et l'autre, immobile sur le quai. Chacun est fondé à prétendre que son environnement propre est au repos, et doit servir de référence, tandis que celui de l'autre est en mouvement, ce qui modifie tous les phénomènes physiques qui s'y produisent. Un même observateur ne peut pas espérer dominer simultanément l'ensemble des phénomènes en ayant un pied sur le quai et l'autre dans le train en mouvement.

3- Le modèle standard.

Dans le tableau qui présente les constituants de base de l'univers, validés par l'expérience, les particules de matière et d'interactions sont regroupées en deux classes par leurs propriétés quantiques: les fermions et les bosons.

		fermions (3 générations de la matière)			bosons (forces)	
		I	II	III		
masse →		2.4 MeV	1.27 GeV	171.2 GeV	0	électromagnétisme
charge →		$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	
spin →		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	
nom →		u up	c charm	t top	γ photon	
	Quarks	4.8 MeV	104 MeV	4.2 GeV	0	interaction forte
		$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	
		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	
		d down	s strange	b bottom	g gluon	
	Leptons	<2.2 eV	<0.17 MeV	<15.5 MeV	91.2 GeV	interaction faible
		0	0	0	0	
		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	
		ν_e neutrino électronique	ν_μ neutrino muonique	ν_τ neutrino tauique	Z^0 boson Z^0	
		0.511 MeV	105.7 MeV	1.777 GeV	80.4 GeV	interaction faible
		-1	-1	-1	± 1	
		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	
		e électron	μ muon	τ tau	W^\pm boson W	

On remarque que la gravitation ne figure pas dans le tableau synthétique du modèle standard de la physique des particules. Cela se justifie par le fait qu'à l'échelle des particules les effets quantiques sont prépondérants, tandis que l'interaction gravitationnelle est négligeable. De plus, malgré les nombreuses tentatives expérimentales entreprises, le graviton n'a toujours pas été détecté et validé. Par conséquent, le modèle standard ne décrit qu'un aspect de l'univers.

Lorsqu'on tient compte des propriétés relativistes classiques des particules, on peut adopter un autre mode de classement, selon qu'elles ont une masse, ou qu'elles sont de masse nulle. La distinction est exclusive, en ce sens que les particules de masse nulle, comme les photons et les gluons pour les interactions, ont une vitesse de déplacement toujours égale à la vitesse de la lumière : elle ne peut jamais être différente. Par contre, les particules massiques, comme les fermions pour la matière, ont une vitesse de déplacement toujours inférieure à la vitesse de la lumière : elle ne peut jamais lui être égale.

4- Le programme d'Einstein.

En prolongement de la relativité générale pour la gravitation, et de ses différentes découvertes majeures, y compris en physique quantique, comme l'introduction en 1905 de la première particule quantique sous la forme de quantum de lumière, ce qui lui valut le prix Nobel en 1921, Einstein avait proposé, dans son programme, une approche symétrique, et cohérente de la physique, en privilégiant le champ continu. « Nous avons deux réalités : *la matière et le champ*. Il est hors de doute que nous ne pouvons pas à présent concevoir que toute la physique puisse être bâtie sur le concept de matière, comme le croyaient les physiciens du début du 19ème siècle....Ne pourrions-nous rejeter le concept de matière et construire une physique basée uniquement sur le champ ?... Nous pourrions regarder la matière comme des régions dans l'espace où le champ est extrêmement intense. Il n'y aurait pas de place, pour notre nouvelle physique, tout à la fois pour le champ et pour la matière, le champ étant la seule réalité.»

Pour Einstein, qui appuyait ses raisonnements théoriques sur des expériences de pensées, il convient de privilégier des images représentatives pour les phénomènes physiques, avant une description mathématique plus précise. « La plupart des idées fondamentales de la science sont essentiellement simples et peuvent en général être exprimées dans le langage que tout le monde comprend. Mais pour suivre ces idées de près, il faut être en possession d'une technique très raffinée d'investigation. Les mathématiques comme instrument de raisonnement sont nécessaires si nous voulons tirer des conclusions qui peuvent être comparées avec l'expérience. Aussi longtemps que nous nous occupons seulement d'idées physiques fondamentales, nous pouvons nous passer du langage mathématique....Les idées doivent plus tard revêtir la forme mathématique d'une théorie quantitative, pour rendre possible la comparaison avec l'expérience....La simplicité mathématique de l'ouvrage de De Broglie, est vraiment admirable. Au moment où son ouvrage parut, la technique mathématique d'autres théories physiques était comparativement très subtile et compliquée. La mathématique traitant le problème des ondes de matière est extrêmement simple et élémentaire, mais les idées fondamentales sont profondes et d'une immense portée...Ce qui me paraît certain, c'est que dans une théorie cohérente, ne doit apparaître, à côté du concept de champ, le concept de particule. La théorie toute entière doit être basée uniquement sur des équations aux dérivées partielles et leurs solutions sans singularité.»

Dans un article reproduit dans le précédent bulletin de l'AEIS, n^o 179, nous avons montré comment on pouvait retrouver les principales propriétés physiques de la matière, lorsque, conformément au programme d'Einstein, on prenait pour base le champ qui se propage à la vitesse de la lumière. La matière correspond aux ondes stationnaires, tandis que les interactions correspondent aux ondes progressives, (particules de masse nulle), Les équations de la mécanique classique relativiste correspondent à l'approximation de l'optique géométrique, quand les fréquences infiniment grandes sont occultées, et que seuls les effets moyens se manifestent. Les équations de la mécanique quantique tiennent compte des fréquences d'oscillations. Les variations de fréquence entraînent les relations de Fourier, homogènes au champ, qui conduisent aux relations de Heisenberg, homogènes à la matière, et à des interactions qui sont formellement identiques aux interactions électromagnétiques, ainsi qu'aux lois de moindre action, et de conservation de l'énergie-impulsion. La variation de la vitesse de propagation du champ induit des interactions qui sont formellement identiques à la gravitation.

Par conséquent, il est possible d'avoir une approche cohérente des phénomènes physiques en admettant que les ondes se propageant à la vitesse de la lumière sont les constituants de base de la matière et des interactions. Quand les fréquences, infiniment grandes, rendent les oscillations inaccessibles, à la fois dans le temps et dans l'espace, les phénomènes physiques se manifestent, expérimentalement et théoriquement, sous la forme de particules.

Cette approche permet de compléter et d'unifier la description de l'univers, comme nous proposons de le montrer par plusieurs exemples simples.

5- Le programme d'Einstein, validé par l'expérience.

De manière générale, les nouvelles technologies évoluent dans le sens du programme, quand elles substituent progressivement, et presque systématiquement, aux différents moyens mécaniques à base matérielle, des dispositifs électroniques, basés sur le champ électromagnétique. Il est significatif que le terme *dématérialisation* désigne le remplacement de supports de documents, comme le papier, par des enregistrements informatiques.

Plus spécifiquement, plusieurs décennies après l'énoncé du programme d'Einstein, les physiciens ont commencé à le mettre effectivement en œuvre quand ils ont remplacé les étalons matériels internationaux de longueur et de temps, qui servaient de références depuis deux siècles, par des étalons électromagnétiques, basés sur la fréquence et la période d'un champ continu qui se propage à la vitesse de la lumière. Par conséquent, du point de vue des mesures expérimentales d'espace et de temps, toute la physique est actuellement basée uniquement sur le champ, et non plus sur la matière.

Mais cette nouvelle approche ne concerne pas seulement les physiciens : elle retentit progressivement sur chacun, dans notre confrontation avec la nature physique.

Par exemple, pour mesurer des longueurs, il existe maintenant des « règles » de lumière, sous la forme de télémètres à laser. Ils ont l'avantage de mesurer plus facilement, plus rapidement, et avec une grande précision, les dimensions d'une chambre, par exemple. En outre, avec l'acquisition des données numériques, on peut les coupler avec le calcul des volumes, et donc des conditions de chauffage, des surfaces, et donc des conditions de couverture des sols, des murs, des plafonds, comme les prix, les délais, etc...

Dès 1905, quand Einstein élaborait la théorie de la relativité restreinte, il avait utilisé, comme moyen de mesure de la distance d'un mobile en mouvement, non pas une règle matérielle, mais un rayon lumineux. Il avait anticipé l'étalon international de longueur, adopté par l'Organisation Internationale de Métrologie Légale en 1960. Il avait d'ailleurs été indirectement à l'origine des étalons électromagnétiques, puisque dans un rapport de 1927 du comité international sur la coopération intellectuelle, qu'il avait signé conjointement avec M. Curie et H.A. Lorentz, il avait préconisé « L'établissement d'un bureau international de métrologie » Il fut créé en 1955, année de la disparition d'Einstein. Actuellement, les mesures de longueurs et de temps, sont définies à partir de la période d'un rayonnement électromagnétique émis par l'atome de césium 133, et par la vitesse de la lumière.

De ce fait, les phénomènes relativistes de contraction des longueurs et de dilatation des temps apparaissent comme des conséquences directes de l'effet Doppler : il affecte toutes les ondes en mouvement, depuis celles qui ont permis la détection de la fuite des galaxies et révélé l'expansion de l'univers, jusqu'à celles des radars pour mesurer la vitesse des voitures. En illustration de son caractère de relativité, on sait que le même son, émis par une sirène emportée par un véhicule en mouvement, est perçu, et mesuré, avec des hauteurs, donc des fréquences, différentes, selon que l'observateur-détecteur est entraîné ou qu'il est immobile et voit le véhicule se rapprocher ou au contraire s'éloigner.

6- L'effet Compton

6.1 Collisions entre particules.

L'effet Compton, qui exprime la collision entre un électron et un photon, est considéré comme une preuve expérimentale du caractère corpusculaire de la matière et de la lumière. Il est à la base d'applications générales dans le modèle standard.

$$m_0c^2 + hv_0 = mc^2 + hv \quad hv_0/c = hv/c + mv \quad m = m_0/\sqrt{1-\beta^2}.$$

Par collision inélastique, le photon incident (hv_0 , hv_0/c), est absorbé par l'électron au repos m_0c^2 . Il lui transfère son énergie et son impulsion. L'électron est mis en mouvement (mc^2 , mv) en émettant un photon (hv , hv/c).

Ces équations sont considérées comme successives au cours du temps. Dans l'effet direct, le membre de gauche disparaît pour laisser la place à celui de droite ; dans l'effet indirect, c'est l'inverse. C'est pourquoi la solution mathématique qui associe des termes des deux membres $m_0c^2 - hv = mc^2 - hv_0$, n'est pas physiquement retenue, comme n'ayant pas de sens : l'électron au repos ne peut pas interagir avec le photon émis avant sa création.

Du point de vue corpusculaire, les conséquences physiques qu'on déduit des équations Compton sont moins complètes que leurs conséquences mathématiques.

6.2 Aspect ondulatoire.

Comme toutes les particules quantiques de matière et d'interaction, ont le double comportement d'onde et de particule, on peut également interpréter les équations Compton en termes purement ondulatoires.

Déjà, dès l'origine, leur résolution avait fait apparaître une longueur d'onde Compton $\lambda_c = h/mc$ pour l'électron, avant même que Louis de Broglie n'associe une fréquence d'oscillation propre N_0 telle que $E_0 = m_0c^2 = hN_0$, et un comportement ondulatoire à la matière, avec une longueur d'onde de Broglie $\lambda_B = h/mv$.

Du point de vue mathématique, les solutions $(m_0c^2 + hv_0)^2 - h^2v_0^2 = (mc^2 + hv)^2 - (hv + mvc)^2$ et $(m_0c^2 - hv)^2 - h^2v^2 = (mc^2 - hv_0)^2 - (mvc - hv_0)^2$, conduisent aux relations réciproques

$$v_0 = v(1 - \beta \cos \theta) / \sqrt{1 - \beta^2} \quad v = v_0(1 - \beta \cos \theta_0) / \sqrt{1 - \beta^2},$$

$$\cos \theta_0 = (-\cos \theta + \beta) / (1 - \beta \cos \theta) \quad \cos \theta = (-\cos \theta_0 + \beta) / (1 - \beta \cos \theta_0).$$

Ce sont les lois relativistes de la réflexion de la lumière sur un miroir en mouvement de vitesse $v = \beta c$, vitesse de l'électron.

La constante de Planck est absente de ces relations. Ainsi, les équations Compton sont conformes aux lois de propagation de la lumière, en optique classique relativiste: le principe du retour inverse justifie que les relations obtenues soient réciproques.

Mais ces relations réciproques soulignent également le caractère relatif des énergies et des fréquences : on peut aussi bien considérer que le repère au repos est celui du membre de gauche que l'inverse. Les fréquences v_0 et v caractérisent la même onde, selon que la mesure est effectuée dans un repère ou dans l'autre (effet Doppler).

Du point de vue corpusculaire pour la lumière, les conséquences physiques qu'on déduit des équations Compton sont moins complètes que celles résultant de ses propriétés ondulatoires.

7- Les paramètres de Planck

7-1 L'ère de Planck.

A partir des équations aux dimensions (longueur L, temps T, masse M) et des valeurs numériques des grandeurs fondamentales, vitesse de la lumière c, constante de Planck h, et constante de gravitation G,

$$C = LT^{-1} = 3.10^8 \text{ms}^{-1} \quad h = ML^2 T^{-1} = 6,62 \cdot 10^{-34} \text{Js} \quad G = M^{-1}L^3 T^{-2} = 6,6710^{-11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$$

on calcule, en fonction de c , h et G , les valeurs numériques des paramètres M , L , T qui définissent le domaine de Planck, comme limites de la validité du modèle standard, (constante de Planck réduite $h/2\pi$ au lieu de h).

$$\begin{aligned} \text{masse } M_P &= \sqrt{(hc/2\pi G)} \approx 2,17 \cdot 10^{-8} \text{ kg.} \\ \text{longueur } L_P &= \sqrt{(hG/2\pi c^3)} \approx 1,6 \cdot 10^{-35} \text{ m.} \\ \text{temps } T_P &= \sqrt{(hG/2\pi c^5)} \approx 5 \cdot 10^{-44} \text{ s.} \\ \text{énergie } E_P &= M_P c^2 = \sqrt{(hc^5/2\pi G)} \approx 1,96 \cdot 10^9 \text{ J} = 1,2 \cdot 10^{19} \text{ GeV} \end{aligned}$$

Les équations aux dimensions, abstraites, n'ont pas de signification physique particulière. Comme la gravitation n'est pas incluse dans le modèle standard des particules, on admet que le temps $T_P \approx 5 \cdot 10^{-44}$ s qui en tient compte, désigne une période très brève après la singularité gravitationnelle originelle, quand les quatre interactions étaient unifiées : c'est l'ère de Planck. Elle définit l'état de l'univers avant l'apparition des particules de matière. Sa dimension était alors inférieure à $L_P \approx 1,6 \cdot 10^{-35}$ m, que l'on désigne par mur de Planck, pour exprimer que c'est une distance infranchissable expérimentalement.

7-2 Les limites de Planck.

A partir des relations fondamentales de Planck-Einstein- de Broglie pour l'énergie pour une particule de la matière : $E=mc^2=h\nu=hc/\lambda_c$ (où λ_c est la longueur d'onde Compton), et de l'équation de la gravitation $F=Gmm'/r^2$, qui détermine son énergie propre $E=Gm^2/\lambda_c$, quand sa dimension est égale à sa longueur d'onde Compton,

$$E= mc^2 = h\nu = h/ T = hc/ \lambda_c = Gm^2/\lambda_c,$$

on retrouve les paramètres de Planck, en calculant m , T et λ_c en fonction de h , c et G (avec le facteur 2π en faisant $r= 2\pi \lambda_c$).

Les équations fondamentales de la matière sont toujours valables dans l'univers actuel. Les limites qu'elles définissent pour une particule ne sont pas seulement intervenues très peu de temps après le Big Bang pour la création de matière à partir du plasma originel. Elles continuent à s'appliquer pour définir les frontières entre l'aspect onde et l'aspect corpuscule d'une même particule matérielle.

II. Réflexions sur la finalisation du prochain Colloque : "*Formation des Systèmes stellaires et planétaires Conditions d'apparition de la vie*"

En ce qui concerne le prochain colloque, notre Collègue Gilbert BELAUBRE déclare n' avoir reçu que 11 résumés sur 16 en vue de la réalisation du fascicule remis aux participants. Par ailleurs concernant les problèmes de financement restent à assumer les frais suivants:

- offre-t-on ou non des pauses-café aux participants qui ont un coût non négligeable?
- il serait peut-être opportun de renvoyer les participants vers les distributeurs de café présents à côté de l'Amphi HERMITE
- la prise en charge du dîner des conférenciers s'élèverait à environ 800€
- la publication des fascicules s'élèverait à environ 600€
- la prise en charge des repas de midi des conférenciers s'élèverait à environ 400€
- La publication des textes complets des conférenciers sera supervisée par notre Collègue Robert FRANCK .

Les demandes de financements suivantes ont été effectuées:

- Ville de Paris: les demandes ont malheureusement été faites au delà des dates limites . Il faudrait recontacter Mme PALMIER et Laurent KANDEL et consulter régulièrement le site internet de la ville de Paris. Par ailleurs il faudrait vérifier que le dossier de l'AEIS est à jour au plan administratif sur le serveur SIMPA des associations de la ville de Paris avant toute demande de subvention. Une demande de financement de 10 000€pourrait néanmoins être réalisée.....
- 1500€ont été collectés auprès du CEA
- Le CNRS ne finance pas les colloques qui lui sont extérieurs (contacts: Mmes BEAUVAIS et LEVY)

Les autres organismes à contacter en vue d'un financement sont :

- L'UNESCO (Contacts: J.C. HALIMI et A. AUDOUZE)
- L'OCDE
- la Commission Européenne (à plus long terme)
- Le Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche (MESR)

Il faut également envisager une communication aux média et à divers organismes tels que :

- La Recherche
- Pour la Science
- Sciences et Avenir
- Société des ingénieurs et scientifiques de France
- Société d'Astrophysique
- Ecoles d'Ingénieurs
- Sté Française d'Exobiologie

Après cette très riche séance, nos travaux prennent fin.

Irène HERPE-LITWIN

Annances

- I. Suite au décès de notre regretté Collègue, Emmanuel NUNEZ , l'AFSCET, le CNAM et l'AEIS organisent:

**Journée AFSCET – AEIS le Samedi 15 février 2014
Conservatoire National des Arts et Métiers, Paris**

**Hommage a Emmanuel Nunez
Clinicien, Homme de Science, Systémicien**



(photo Michèle LAUDE)

Interventions prévues :

**Gilbert Belaubre (AFSCET et AEIS), Pierre Bricage (AFSCET) Gérard
Donnadiou (AFSCET), Marc Fellous (INSERM),
Guy Fitoussi, Françoise Ferré, Vincent Figureau,
Jean-Miguel Pire, Carlos Sonnenschein (Tufts University), Ana Soto (Tufts
University), Jean-Claude Soufir,
Martine Timsit.**

II. RAPPEL concernant notre prochain Colloque des 5 et 6 février 2014:

site inscriptions : <http://aeis-2014.sciencesconf.org>

**FORMATION DES SYSTÈMES STELLAIRES ET PLANÉTAIRES
CONDITIONS D'APPARITION DE LA VIE
COLLOQUE DE L'ACADÉMIE EUROPÉENNE INTERDISCIPLINAIRE DES SCIENCES**

5 et 6 février 2014

A l'Institut Henri Poincaré

Amphithéâtre Hermite

11, rue Pierre et Marie Curie

75005PARIS



L'étude de nos origines est reconnue comme l'un des grands défis scientifiques du XXI^e siècle, celle-ci mobilise plusieurs champs conceptuels et combine de nombreux aspects de la connaissance scientifique dans une variété de domaines. Quelle succession d'événements a conduit à la formation des planètes ? Quels processus ont permis l'apparition de la vie sur notre Terre ? Existe-t-il d'autres systèmes sur lesquels une forme de vie pourrait se développer ? Depuis la découverte en 1995 de la première planète extrasolaire de nombreuses autres exoplanètes ont été trouvées dans des configurations qui soulèvent de nouvelles questions sur la formation des systèmes planétaires. De plus, les missions spatiales de ces dernières années ont permis de mieux comprendre la formation du système solaire. Alors que la vie sur Terre se révèle d'une extraordinaire diversité, les progrès récents en astrobiologie permettent d'envisager la recherche d'indices de la présence de vie sur des exoplanètes comparables à la Terre d'ici une ou deux décennies. Ces nouveaux éléments font de la recherche sur nos origines l'un des thèmes majeurs de ce siècle.

Ce colloque a pour objet de présenter les derniers résultats sur les différents aspects de cette recherche interdisciplinaire qui est conduite au plan national, européen et international. La question des origines est si ancienne et profonde qu'elle est aussi développée dans une perspective historique, épistémologique et philosophique. Une table ronde est consacrée à ces aspects.

Comité scientifique

Pierre ALBAREDE (ENS-Lyon), Gilbert BELAUBRE (AEIS), André BRACK (CNRS-Orléans), Sylvie DERENNE (CNRS/ENS Paris), Thérèse ENCRENAZ (IAP), Maryvonne GERIN (CNRS/ENS Paris), Louis LE SERGEANT d'HENDECOURT (IAS-Orsay), Marie-Christine MAUREL (Université PMC-Paris), Pierre NABET (AEIS), Marc OLLIVIER (IAS-Orsay), François RAULIN (Université Paris-Est Créteil), François ROBERT (MNHN), Alain STAHL (AEIS)

Comité d'organisation

Irène HERPE-LITWIN, Gilbert BELAUBRE, Gilles COHEN-TANNOUDJI, Alain CORDIER, Claude ELBAZ, Robert FRANCK, Jean-Pierre FRANCOISE, Michel GONDRAN, Victor MASTRANGELO, Jean SCHMETS, Jean VERDETTI

Contact

irene.herpe@science-inter.com

iherpelitwin@gmail.com

PROGRAMMATION du COLLOQUE à la date du 22/12/2013

**FORMATION DES SYSTÈMES STELLAIRES
et PLANÉTAIRES
CONDITIONS D'APPARITION de la VIE**

Session 1. Formation des systèmes stellaires et planétaires

Mercredi 5 février /matin

Modératrice: Maryvonne GERIN (LERMA/ENS-Paris)

1. Nicolas PRANTZOS (IAP)
2. Patrick HENNEBELLE (LERMA/ENS-Paris)
3. Alessandro MORBIDELLI (CNRS/Observatoire de Nice)
4. Giovanna TINETTI (Department of Physics & Astronomy/University College Londres)

Session 2. Les briques de la vie primitive et les environnements planétaires

Mercredi 5 février/ après-midi

Modérateur: François ROBERT (LMCM/MNHN-Paris)

1. Louis LE SERGEANT D'HENDECOURT (IAS-Orsay)
2. Sylvie DERENNE (BioEMCo/ENS/Université PMC-Paris)
3. Raffaele SALADINO (Ecology and Biology Science Department, University of Tuscia-Vterbo, Italy)
4. Francis ALBARÈDE (LGL/ENS-Lyon)

Session 3. Transition vers la vie primitive et diversité

Jeudi 6 février/matin

Modératrice: Marie-Christine MAUREL (ANbioPhy/Université PMC-Paris)

1. Emmanuelle JAVAUX (UPPM/Université de Liège)
2. Giuseppe ZACCAI (ILL/IBS-Grenoble)
3. Bruno FRANZETTI (ELMA/IBS-Grenoble)
1. Ernesto DI MAURO (Dipartimento BBCD – La Sapienza - Université de Rome)

Session 4. Signatures extraterrestres et modélisation

Jeudi 6 février/après-midi

Modérateur: Marc OLLIVIER (IAS-Orsay)

1. Thérèse ENCRENAZ (LESIA/Observatoire de Paris-Meudon)
2. Valentine WAKELAM (CNRS/Laboratoire d'Astrophysique-Bordeaux)
3. Martine BEN AMAR (LPS/ENS-Paris)

Table Ronde « de l'inerte au vivant » animée par Sylvestre HUET, journaliste
(à confirmer)

Allocution de clôture : Pierre JOLIOT, Institut de Biologie Physico-Chimique,
Collège de France et Académie des Sciences

III. Annonces CORDIS

Mathématiques appliquées

Event title: 'ICNPAA Congress: Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences', Narvik, Norway

Date: 2014-07-15

Organiser: For further information, please visit: <http://icnpaa.com/index.php/icnpaa/2014>

Summary: An event entitled 'ICNPAA Congress: Mathematical Problems in Engineering, Aerospace and Sciences' will be held from 15 to 18 July 2014 in Narvik, Norway. The ICNPAA congresses bring together scholars, leading researchers and experts from diverse background...

Link to event

record: http://cordis.europa.eu/fetch?CALLER=EN_NEWS_EVENT&ACTION=D&CAT=NEWS&RCN=36321

Biologie

[New Report on Stem Cell Research Reveals the Field is Growing Twice as Fast as The World Average](#)

Presenting positive implications for innovative new treatments and personalized medicine.

Organisation: EuroStemCell

Country:

Category: Publication

Biochimie

Event title: Second International Conference on Bioinspired and Biobased Chemistry & Materials, Nice, France

Date: 2014-10-15

Organiser: For further information, please visit: <http://sites.unice.fr/nice2014-conference/>

Summary: The Second International Conference on Bioinspired and Biobased Chemistry & Materials will be held from 15 to 17 October 2014 in Nice, France. Bioinspired and biobased chemistry and materials is an emerging field covering materials science, chemistry, phy...

Link to event

record: http://cordis.europa.eu/fetch?CALLER=EN_NEWS_EVENT&ACTION=D&CAT=NEWS&RCN=36330

[Infrared sheds light on single protein complexes](#)

Researchers from the nanoscience research center CIC nanoGUNE, the Freie Universität Berlin and Neaspec company employ nano-FTIR spectroscopy for label-free chemical and structural imaging of proteins with nanoscale spatial resolution and with sensitivity to single protein complexes of less than one attogram (10-18 gram). The work has been published recently in *Nature Communications*.

Organisation: ELHUYAR

Country: SPAIN

Category: Publication

IV. Notre Collègue Le Pr Henry de LUMLEY nous fait part de la célébration en 2014 du 50ème anniversaire de l'ouverture du grand chantier de fouilles préhistoriques de la Caune de l'Arago

Documents

Pour préparer son exposé notre Collègue Michel GONDRAN nous a communiqué un article qu'il a rédigé avec Alexandre GONDRAN sur la revue ArXIV:1311.1466v1, "*The theory of the double preparation: discerned and indiscerned particles*".

Nous vous proposons donc :

- p.17: une introduction en français à la problématique donnée par notre Collègue Michel GONDRAN
- p. 18 la totalité de l'article en langue anglaise

Une interprétation synthétique: "la théorie de la double préparation"

Au congrès Solvay de 1927, trois interprétations apparemment inconciliables de la fonction d'onde de la mécanique quantique sont proposées: l'interprétation de l'onde pilote par de Broglie, l'interprétation de l'onde soliton par Schrödinger et la règle statistique de Born par Born et Heisenberg. Dans cette présentation nous démontrons la complémentarité de ces interprétations qui correspondent à des systèmes quantiques préparés différemment et nous en déduisons une interprétation synthétique: "la théorie de la double préparation".

Tout d'abord, nous introduisons en mécanique quantique le concept de particule semi-classique préparée statistiquement et nous démontrons que l'équation de Schrödinger de ces particules converge, quand on fait tendre la constante de Planck vers zéro, vers les équations d'un ensemble statistique de particules classiques. Ces particules classiques sont indiscernables et nous concluons à la nécessité de l'interprétation de Broglie-Bohm pour les particules semi-classiques préparées statistiquement (onde statistique).

Puis, nous introduisons en mécanique quantique le concept de particule semi-classique préparée de manière déterministe et nous démontrons que l'équation de Schrödinger de ces particules converge, quand on fait tendre la constante de Planck vers zéro, vers les équations d'une particule classique unique. Cette particule classique est discernable et nous concluons à la nécessité de l'interprétation de Schrödinger pour les particules semi-classiques préparées de manière déterministe (onde soliton).

Ces deux théorèmes correspondent au fondement de notre interprétation. Ils s'appuient sur l'analyse Minplus, une nouvelle branche des mathématiques que j'ai développée à la suite de Maslov, et sur l'intégrale de chemin Minplus qui est l'analogue en mécanique classique de l'intégrale de chemin de Feynman en mécanique quantique.

Enfin, quand l'interprétation semi-classique n'est pas valide, l'interprétation statistique de Born est la seule valide si nous conservons l'équation de Schrödinger. En effet, pour la description des transitions entre les niveaux, la fonction d'onde statistique de Schrödinger ne permet pas, de remonter à un comportement individuel. Nous faisons l'hypothèse qu'il est possible de construire une théorie quantique des champs déterministe (dont nous donnons un début de construction) qui étende au cas non semi-classique la théorie de la double préparation semi-classique précédente.

On peut considérer cette interprétation qui dépend de la préparation de la particule comme une réponse à la "théorie de la double solution" que recherchait Louis de Broglie: "*J'introduisais, sous le nom de « théorie de la double solution » l'idée qu'il fallait distinguer deux solutions distinctes, mais intimement reliées à l'équation des ondes, l'une que j'appelais l'onde u étant une onde physique réelle et non normable, comportant un accident local définissant la particule et représenté par une singularité, l'autre, l'onde \square de Schrödinger, normable et dépourvue de singularité, qui ne serait qu'une représentation de probabilités*" (de Broglie, 1971). Nous avons repris cette idée d'une onde statistique Ψ et d'une onde soliton u, non sous la forme d'une double solution mais d'une double interprétation de la fonction d'onde suivant les conditions initiales de sa préparation.

The theory of the double preparation: discerned and indiscerned particles

Michel Gondran

University Paris Dauphine, Lamsade, 75 016 Paris, France*

Alexandre Gondran

École Nationale de l'Aviation Civile, 31000 Toulouse, France†

In this paper we propose a deterministic and realistic quantum mechanics interpretation which may correspond to Louis de Broglie's "double solution theory". Louis de Broglie considers two solutions to the Schrödinger equation, a singular and physical wave u representing the particle (soliton wave) and a regular wave representing probability (statistical wave). We return to the idea of two solutions, but in the form of an interpretation of the wave function based on two different preparations of the quantum system. We demonstrate the necessity of this double interpretation when the particles are subjected to a semi-classical field by studying the convergence of the Schrödinger equation when the Planck constant tends to 0. For this convergence, we reexamine not only the foundations of quantum mechanics but also those of classical mechanics, and in particular two important paradox of classical mechanics: the interpretation of the principle of least action and the Gibbs paradox. We find two very different convergences which depend on the preparation of the quantum particles: particles called indiscerned (prepared in the same way and whose initial density is regular, such as atomic beams) and particles called discerned (whose density is singular, such as coherent states). These results are based on the Minplus analysis, a new branch of mathematics that we have developed following Maslov, and on the Minplus path integral which is the analog in classical mechanics of the Feynman path integral in quantum mechanics. The indiscerned (or discerned) quantum particles converge to indiscerned (or discerned) classical particles and we deduce that the de Broglie-Bohm pilot wave is the correct interpretation for the indiscerned quantum particles (wave statistics) and the Schrödinger interpretation is the correct interpretation for discerned quantum particles (wave soliton). Finally, we show that this double interpretation can be extended to the non semi-classical case.

I. INTRODUCTION

For Louis de Broglie, the correct interpretation of quantum mechanics was the "theory of the double solution" introduced in 1927¹ and for which the pilot-wave was just a low-level product²: *I introduced as a 'double solution theory' the idea that it was necessary to distinguish two different solutions but both linked to the wave equation, one that I called wave u which was a real physical wave but not normalizable having a local anomaly defining the particle and represented by a singularity, the other one as the Schrödinger Ψ wave, which is normalizable without singularities and being a probability representation.*

Louis de Broglie distinguishes two solutions to the Schrödinger equation, a singular and physical wave u representing the particle (soliton wave) and a regular wave Ψ representing probability (statistical wave). But, de Broglie don't have never find a consistent "double solution theory". We return to the idea of two solutions, but in the form of a double interpretation of the wave function based on different preparations of the quantum system. We demonstrate the necessity of this double interpretation when the particles are subjected to a semi-classical field by studying the convergence of the Schrödinger equation when the Planck constant tends to 0^{4,5}. This convergence of quantum to classical mechanics poses three types of difficulty that seem insurmountable:

- a physical difficulty, because h is a constant and

therefore its convergence to 0 is not physical;

- a conceptual difficulty: in quantum mechanics, particles are regarded as indistinguishable whereas they are considered to be distinguishable in classical mechanics;
- mathematical difficulties of convergence of equations.

The physical difficulty is the easiest to solve: it is only mathematically, not physically, that we decrease the Planck constant to 0; numerically we obtain the same results if we increase the mass m of the particle to infinity.

The conceptual difficulty forces us into reexamining not only the foundations of quantum mechanics but also those of classical mechanics. It is necessary to understand and solve two important paradoxes of classical mechanics: the interpretation of the principle of least action where the "final causes" seem to be substituted for the "efficient causes"; the Gibbs paradox where the entropy calculation of a mixture of two identical gases by classical mechanics with distinguishable particles leads to an entropy twice as big as expected. We solve the conceptual difficulty by showing that it is natural to introduce the concepts of discerned and indiscerned particles both in classical mechanics and in quantum mechanics.

The mathematical difficulties will be greatly simplified by considering two types of initial conditions (discerned and indiscerned particles) which yield very differ-

ent mathematical convergences. They are also simplified by the Minplus analysis^{6,7}, a new branch of mathematics that we have developed following Maslov^{8,9}. The paper is organized as follows. In section II, we will show that the difficulties of interpretation of the principle of least action concerning the "final causes" come from the "Euler-Lagrange action" (or classical action) $S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)$, which links the initial position \mathbf{x}_0 and its position \mathbf{x} at time t and not from the "Hamilton-Jacobi action" $S(\mathbf{x}, t)$, which depends on an initial action $S_0(\mathbf{x})$. These two actions are solutions to the same Hamilton-Jacobi equation, but with very different initial conditions: smooth conditions for the Hamilton-Jacobi action, singular conditions for the Euler-Lagrange action.

In section III, we show how Minplus analysis, a new branch of nonlinear mathematics, explains the difference between the Hamilton-Jacobi action and the Euler-Lagrange action. We obtain the equation between these two actions, which we call the Minplus path integral: it is the analog in classical mechanics of the Feynman path integral in quantum mechanics. We show that it is the key to understanding the principle of least action.

In section IV, we introduce in classical mechanics the concept of indiscerned particles through the statistical Hamilton-Jacobi equations. The discerned particles in classical mechanics correspond to a deterministic action $S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$, which links a particle in initial position \mathbf{x}_0 and initial velocity \mathbf{v}_0 to its position \mathbf{x} at time t and verifies the deterministic Hamilton-Jacobi equations. And the Gibbs paradox is solved by the indiscerned particles in classical mechanics.

In section V, we study the convergence of quantum mechanics to classical mechanics when the Planck constant tends to 0 by considering two cases: the first corresponds to the convergence to an indiscerned classical particle, and the second corresponds to the convergence to a classical discerned particle.^{4,5} Based on these convergences, we propose a new interpretation of quantum mechanics, the "theory of the double preparation", a response that corresponds to Louis de Broglie's "theory of the double solution".

In section VI, we generalize this interpretation when the semi-classical approximation is not valid. Following de Muynck¹⁰, we show that it is possible to construct a deterministic field quantum theory that extends the previous double semi-classical interpretation to the non semi-classical case.

II. THE EULER-LAGRANGE AND HAMILTON-JACOBI ACTIONS

The intense debate on the interpretation of the wave function in quantum mechanics for eighty years has in fact left the debate on the interpretation of the action and the principle of least action in classical mechanics in the dark, since their introduction in 1744 by Pierre-Louis Moreau de Maupertuis¹¹: "*Nature, in the production of*

its effects, does so always by the simplest means [...] the path it takes is the one by which the quantity of action is the least". Maupertuis understood that, under certain conditions, Newton's equations are equivalent to the fact that a quantity, which he calls the action, is minimal. Indeed, one can verify that the trajectory realized in Nature is that which minimizes (or renders extremal) the action, which is a function depending on the different possible trajectories.

However, this principle has often been viewed as puzzling by many scholars, including Henri Poincaré, who was nonetheless one of its most intensive users¹²: "*The very enunciation of the principle of least action is objectionable. To move from one point to another, a material molecule, acted on by no force, but compelled to move on a surface, will take as its path the geodesic line, i.e., the shortest path. This molecule seems to know the point to which we want to take it, to foresee the time it will take to reach it by such a path, and then to know how to choose the most convenient path. The enunciation of the principle presents it to us, so to speak, as a living and free entity. It is clear that it would be better to replace it by a less objectionable enunciation, one in which, as philosophers would say, final effects do not seem to be substituted for acting causes.*"

We will show that the difficulties of interpretation of the principle of least action concerning the "final causes" or the "efficient causes" come from the existence of two different actions: the "Euler-Lagrange action" $S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)$ and the "Hamilton-Jacobi action" $S(\mathbf{x}, t)$.

Let us consider a system evolving from the position \mathbf{x}_0 at initial time to the position \mathbf{x} at time t where the variable of control $\mathbf{u}(s)$ is the velocity:

$$\frac{d\mathbf{x}(s)}{ds} = \mathbf{u}(s), \quad \forall s \in [0, t] \quad (1)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}. \quad (2)$$

If $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ is the Lagrangian of the system, when the two positions \mathbf{x}_0 and \mathbf{x} are given, the Euler-Lagrange action $S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)$ is the function defined by:

$$S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0) = \min_{\mathbf{u}(s), 0 \leq s \leq t} \int_0^t L(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s), s) ds, \quad (3)$$

where the minimum (or more generally an extremum) is taken on the controls $\mathbf{u}(s)$, $s \in [0, t]$, with the state $\mathbf{x}(s)$ given by equations (1) and (2). This is the principle of least action defined by Euler¹³ in 1744 and Lagrange¹⁴ in 1755.

The solution $(\tilde{\mathbf{x}}(s), \tilde{\mathbf{u}}(s))$ of (3), if the Lagrangian $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ is twice differentiable, satisfies the Euler-Lagrange equations on the interval $[0, t]$:

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s), s) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(s), \dot{\mathbf{x}}(s), s) = 0, \quad \forall s \in [0, t] \quad (4)$$

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}. \quad (5)$$

For a non-relativistic particle in a linear potential field with the Lagrangian $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + \mathbf{K}\cdot\mathbf{x}$, equation (4) yields $\frac{d}{ds}(m\dot{\mathbf{x}}(s)) - \mathbf{K} = 0$. The trajectory minimizing the action is $\tilde{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}_0 + \frac{s}{t}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - \frac{\mathbf{K}}{2m}ts + \frac{\mathbf{K}}{2m}s^2$, and the Euler-Lagrange action is equal to

$$S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0) = m\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2}{2t} + \frac{\mathbf{K}\cdot(\mathbf{x} + \mathbf{x}_0)}{2}t - \frac{K^2}{24m}t^3. \quad (6)$$

Figure 1 shows different trajectories going from x_0 at time $t = 0$ to x at final time t . The parabolic trajectory $\tilde{x}(s)$ corresponds to this which realizes the minimum in the equation (3).

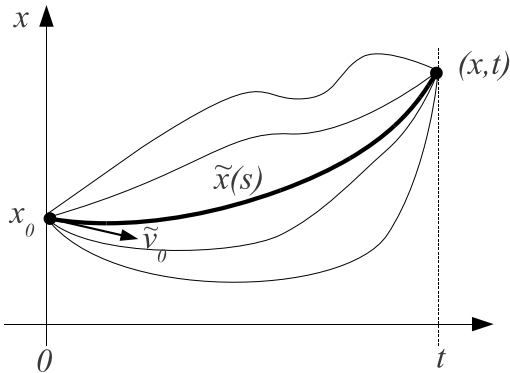


FIG. 1. Different trajectories $x(s)$ ($0 \leq s \leq t$) between $(x_0, 0)$ and (x, t) and the optimal trajectory $\tilde{x}(s)$ with $\tilde{\mathbf{v}}_0 = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{t} - \frac{Kt}{2m}$.

Equation (3) seems to show that, among the trajectories which can reach (\mathbf{x}, t) from the initial position \mathbf{x}_0 , the principle of least action allows to choose the velocity at each time. In reality, the principle of least action used in equation (3) does not choose the velocity at each time s between 0 and t , but only when it arrives at \mathbf{x} at time t . The knowledge of the velocity at each time s ($0 \leq s \leq t$) requires the resolution of the Euler-Lagrange equations (4,5) on the whole trajectory. In the case of a non-relativistic particle in a linear potential field, the velocity at time s ($0 \leq s \leq t$) is $\tilde{\mathbf{v}}(s) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{t} - \frac{Kt}{2m} + \frac{Ks}{m}$ with the initial velocity

$$\tilde{\mathbf{v}}_0 = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{t} - \frac{Kt}{2m}. \quad (7)$$

Then, $\tilde{\mathbf{v}}_0$ depends on the position \mathbf{x} of the particle at the final time t . This dependence of the "final causes" is general. This is the Poincaré's main criticism of the principle of least action: "*This molecule seems to know the point to which we want to take it, to foresee the time it will take to reach it by such a path, and then to know how to choose the most convenient path.*"

One must conclude that, without knowing the initial velocity, the Euler-Lagrange action answers a problem posed by an observer, and not by Nature: "What would be the velocity of the particle at the initial time to arrive

in \mathbf{x} at time t ?" The resolution of this problem implies that the observer solves the Euler-Lagrange equations (4,5) after the observation of \mathbf{x} at time t . This is an *a posteriori* point of view.

But from 1830, Hamilton¹⁵ proposes to consider the action S as a function of the coordinates and of the time $S(\mathbf{x}, t)$. It is customary to call it Hamilton's principal function¹⁶⁻¹⁸. In the following, we refer to it as the Hamilton-Jacobi action. Indeed, for the Lagrangian $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - V(\mathbf{x}, t)$, this action satisfies the Hamilton-Jacobi equations:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}(\nabla S)^2 + V(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (8)$$

$$S(\mathbf{x}, 0) = S_0(\mathbf{x}). \quad (9)$$

The initial condition $S_0(\mathbf{x})$ is essential to defining the general solution to the Hamilton-Jacobi equations (8,9) although it is ignored in the classical mechanics textbooks such as those of Landau¹⁸ chap.7 § 47 and Goldstein¹⁶ chap. 10. However, the initial condition $S_0(\mathbf{x})$ is mathematically necessary to obtain the general solution to the Hamilton-Jacobi equations. Physically, it is the condition that describes the preparation of the particles. We will see that this initial condition is the key to understanding the principle of least action.

The main property of the Hamilton-Jacobi action is that the velocity of a non-relativistic classical particle is given for each point (\mathbf{x}, t) by:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\nabla S(\mathbf{x}, t)}{m}. \quad (10)$$

In the general case where $S_0(\mathbf{x})$ is a regular function, for example differentiable, equation (10) shows that the solution $S(\mathbf{x}, t)$ of the Hamilton-Jacobi equations yields the velocity field for each point (\mathbf{x}, t) from the velocity field $\frac{\nabla S_0(\mathbf{x})}{m}$ at the initial time. In particular, if at the initial time, we know the initial position \mathbf{x}_{init} of a particle, its velocity at this time is equal to $\frac{\nabla S_0(\mathbf{x}_{init})}{m}$. From the solution $S(\mathbf{x}, t)$ of the Hamilton-Jacobi equations, we deduce with (10) the trajectories of the particle. The Hamilton-Jacobi action $S(\mathbf{x}, t)$ is then a field which "pilots" the particle.

There is another solution to the Hamilton-Jacobi equation; it is the Euler-Lagrange action. Indeed, $S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)$ satisfies the Hamilton-Jacobi (8) with the initial condition

$$S(\mathbf{x}, 0) = \{0 \text{ if } \mathbf{x} = \mathbf{x}_0, +\infty \text{ if not}\} \quad (11)$$

which is a very singular function. Mathematical analysis will help us to interpret the solution to the Hamilton-Jacobi equations and the principle of least action.

III. MINPLUS ANALYSIS AND THE MINPLUS PATH INTEGRAL

There exists a new branch of mathematics, Minplus analysis, which studies nonlinear problems through a lin-

ear approach, cf. Maslov^{8,9} and Gondran^{6,7}. The idea is to substitute the usual scalar product $\int_X f(x)g(x)dx$ with the Minplus scalar product:

$$(f, g) = \inf_{x \in X} \{f(x) + g(x)\} \quad (12)$$

In the scalar product we replace the field of the real number $(\mathbb{R}, +, \times)$ with the algebraic structure *Minplus* $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$, i.e. the set of real numbers (with the element infinity $\{+\infty\}$) endowed with the operation Min (minimum of two reals), which replaces the usual addition, and with the operation $+$ (sum of two reals), which replaces the usual multiplication. The element $\{+\infty\}$ corresponds to the neutral element for the operation Min, $\text{Min}(\{+\infty\}, a) = a \forall a \in \mathbb{R}$. This approach bears a close similarity to *the theory of distributions for the nonlinear case*; here, the operator is "linear" and continuous with respect to the Minplus structure, though *nonlinear* with respect to the classical structure $(\mathbb{R}, +, \times)$. In this Minplus structure, the Hamilton-Jacobi equation is linear, because if $S_1(\mathbf{x}, t)$ and $S_2(\mathbf{x}, t)$ are solutions to (8), then $\min\{\lambda + S_1(\mathbf{x}, t), \mu + S_2(\mathbf{x}, t)\}$ is also a solution to the Hamilton-Jacobi equation (8).

The analog to the Dirac distribution $\delta(\mathbf{x})$ in Minplus analysis is the nonlinear distribution $\delta_{\min}(\mathbf{x}) = \{0 \text{ if } \mathbf{x} = \mathbf{0}, +\infty \text{ if not}\}$. With this nonlinear Dirac distribution, we can define elementary solutions as in classical distribution theory. In particular, we obtain:

The classical Euler-Lagrange action $S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)$ is the elementary solution to the Hamilton-Jacobi equations (8)(9) in the Minplus analysis with the initial condition

$$S(\mathbf{x}, 0) = \delta_{\min}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \{0 \text{ if } \mathbf{x} = \mathbf{x}_0, +\infty \text{ if not}\}. \quad (13)$$

The Hamilton-Jacobi action $S(\mathbf{x}, t)$ is then given by the Minplus integral

$$S(\mathbf{x}, t) = \inf_{\mathbf{x}_0} \{S_0(\mathbf{x}_0) + S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)\}. \quad (14)$$

that we call the Minplus path integral. It is an equation similar to the Hopf-Lax formula^{19,20}. This equation is in analogy with the solution to the heat transfer equation given by the classical integral:

$$S(x, t) = \int S_0(x_0) \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4t}} dx_0, \quad (15)$$

which is the product of convolution of the initial condition $S_0(x)$ with the elementary solution to the heat transfer equation $e^{-\frac{x^2}{4t}}$.

This Minplus path integral yields a very simple relation between the Hamilton-Jacobi action, the general solution to the Hamilton-Jacobi equation, and the Euler-Lagrange actions, the elementary solutions to the Hamilton-Jacobi equation. We can also consider that the Minplus integral (14) for the action in classical mechanics is analogous to the Feynmann path integral for the wave function in quantum mechanics. Indeed, in the Feynman paths

integral²¹ (p. 58), the wave function $\Psi(\mathbf{x}, t)$ at time t is written as a function of the initial wave function $\Psi_0(\mathbf{x})$:

$$\Psi(\mathbf{x}, t) = \int F(t, \hbar) \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)\right) \Psi_0(\mathbf{x}_0) d\mathbf{x}_0 \quad (16)$$

where $F(t, \hbar)$ is an independent function of \mathbf{x} and of \mathbf{x}_0 .

For a particle in a linear potential $V(\mathbf{x}) = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{x}$ with the initial action $S_0(\mathbf{x}) = m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{x}$, we deduce from equation (14) that the Hamilton-Jacobi action is equal to $S(\mathbf{x}, t) = m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{x} - \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0^2 t + \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}t - \frac{1}{2}\mathbf{K} \cdot \mathbf{v}_0 t^2 - \frac{\mathbf{K}^2 t^3}{6m}$.

Figure 2 shows the classical trajectories (parabolas) going from different starting points x_0^i at time $t = 0$ to the point x at final time t . The Hamilton-Jacobi action is compute with these trajectories in the Minplus path integral (14).

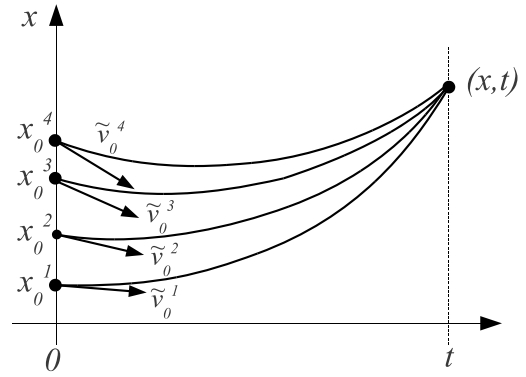


FIG. 2. Classical trajectories $\tilde{x}(s)$ ($0 \leq s \leq t$) between the different initial positions x_0^i and the position x at time t . We obtain $\tilde{v}_0^i = \frac{x-x_0^i}{t} - \frac{Kt}{2m}$.

Finally, we can write the Minplus paths integral as follows:

$$S(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{x}_0; \mathbf{u}(s), 0 \leq s \leq t} \left\{ S_0(\mathbf{x}_0) + \int_0^t L(\mathbf{x}(s), \mathbf{u}(s), s) ds \right\} \quad (17)$$

where the minimum is taken on all initial positions \mathbf{x}_0 and on the controls $\mathbf{u}(s)$, $s \in [0, t]$, with the state $\mathbf{x}(s)$ given by equations (1) and (2). This is possible because $S_0(\mathbf{x}_0)$ does not play a role in (17) for the minimization on $\mathbf{u}(s)$.

Equation (17) seems to show that, among the trajectories which can reach (\mathbf{x}, t) from an unknown initial position and a known initial velocity field, Nature chooses the initial position and at each time the velocity that yields the minimum (or the extremum) of the Hamilton-Jacobi action.

Equations (10), (8) and (9) confirm this interpretation. They show that the Hamilton-Jacobi action $S(\mathbf{x}, t)$ does not solve only a given problem with a single initial condition $(\mathbf{x}_0, \frac{\nabla S_0(\mathbf{x}_0)}{m})$, but a set of problems with an infinity of initial conditions, all the pairs $(\mathbf{y}, \frac{\nabla S_0(\mathbf{y})}{m})$. It answers

the following question: "If we know the action (or the velocity field) at the initial time, can we determine the action (or the velocity field) at each later time?" This problem is solved sequentially by the (local) evolution equation (8). This is an *a priori* point of view. It is the problem solved by Nature with the principle of least action.

For a particle in a linear potential $V(\mathbf{x}) = -\mathbf{K}\cdot\mathbf{x}$ with the initial action $S_0(\mathbf{x}) = m\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{x}$, the initial velocity field is constant, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \frac{\nabla S_0(\mathbf{x})}{m} = \mathbf{v}_0$ and the velocity field at time t is also constant, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\nabla S(\mathbf{x}, t)}{m} = \mathbf{v}_0 + \frac{\mathbf{K}t}{m}$. Figure 3 shows these velocity fields.

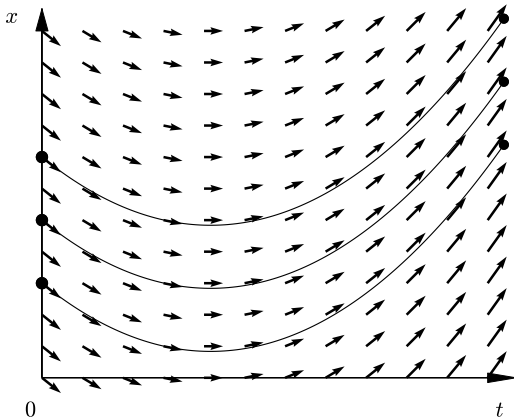


FIG. 3. Velocity field that corresponds to the Hamilton-Jacobi action $S(\mathbf{x}, t) = m\mathbf{v}_0\cdot\mathbf{x} - \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0^2t + \mathbf{K}\cdot\mathbf{x}t - \frac{1}{2}\mathbf{K}\cdot\mathbf{v}_0t^2 - \frac{\mathbf{K}^2t^3}{6m}$ ($\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\nabla S(\mathbf{x}, t)}{m} = \mathbf{v}_0 + \frac{\mathbf{K}t}{m}$) and three trajectories of particles piloted by this field.

IV. DISCERNED AND INDISCERNED PARTICLES IN CLASSICAL MECHANICS

We show that the difficulties interpreting the action and the wave function result from the ambiguity in the definition of the conditions for the preparation of particles, which entails an ambiguity concerning the initial conditions. This ambiguity is related to the notion of indiscernibility which has never been well defined in the literature. It is responsible in particular for the Gibbs paradox: when calculating the entropy of a mixture of two identical gases in equilibrium, calculation by classical mechanics with distinguishable particles leads to an entropy twice as big as expected. If we replace these particles with indistinguishable particles, then the factor related to the indiscernibility yields the correct result.

In almost all textbooks on statistical mechanics, it is considered that this paradox stated by Willard Gibbs in 1889, was "solved" by quantum mechanics over thirty-five years later, thanks to the introduction of the indiscernibility postulate for identical quantum particles.

Indeed, it was Einstein who, in 1924, introduced the indistinguishability of molecules of an ideal gas at the same time as the Bose-Einstein statistics. Nonetheless, as pointed out by Henri Bacry, "*history might have followed a different path. Indeed, quite logically, we could have applied the principle of indiscernibility to save the Gibbs paradox. [...] This principle can be added to the postulates of quantum mechanics as well as to those of classical mechanics*".²²

This same observation has been made by a large number of other authors. In 1965 Landé²³ demonstrated that this indiscernibility postulate of classical particles is sufficient and necessary in order to explain why entropy vanished. In 1977, Leinaas and Myrheim²⁴ used it for the foundation of their identical classical and quantum particles theory. Moreover, as noted by Greiner et al.²⁵, in addition to the Gibbs paradox, several cases where it is needed to consider indistinguishable particles in classical mechanics and distinguishable particles in quantum mechanics can be found: "*Hence, the Gibbs factor $\frac{1}{N!}$ is indeed the correct recipe for avoiding the Gibbs paradox. From now on we will therefore always take into account the Gibbs correction factor for indistinguishable states when we count the microstates. However, we want to emphasize that this factor is no more than a recipe to avoid the contradictions of classical statistical mechanics. In the case of distinguishable objects (e.g., atoms which are localized at certain grid points), the Gibbs factor must not be added. In classical theory the particles remain distinguishable. We will meet this inconsistency more frequently in classical statistical mechanics.*"²⁵ p.134

We propose an accurate definition of both discernability and indiscernability in classical mechanics and a way to avoid ambiguities and paradoxes. Here, we only consider the case of a single particle or a system of identical particles without interactions and prepared in the same way.

In classical mechanics, a particle is usually considered as a point and is described by its mass m , its charge if it has one, as well as its position x_0 and velocity v_0 at the initial instant. If the particle is subject to a potential field $V(x)$, we can deduce its path because its future evolution is given by Newton's or Lorentz's equations. This is why classical particles are considered distinguishable. We will show, however, that a classical particle can be either non-discerned or discerned depending on how it is prepared.

We now consider a particle within a stationary beam of classical identical particles such as electronic, atomic or molecular beams (CO_2 or C_{60}). At a very macroscopic level, one can consider a tennis ball canon. Let us note that there is an abuse of language when one talks about a classical particle. One should instead speak of a particle that is studied in the framework of classical mechanics.

For a particle of this beam, we do not know at the initial instant the exact position or the exact velocity, only the characteristics describing the beam, that is to say, an initial probability density $\rho_0(\mathbf{x})$ and an initial velocity field $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ known through the initial action $S_0(\mathbf{x})$ by the

equation $\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = \frac{\nabla S_0(\mathbf{x})}{m}$ where m is the particle mass. This yields the following definition:

Definition 1 (Indiscerned prepared Particle) - A classical particle is said to be *indiscerned prepared* when only the characteristics of the beam from which it comes (initial probability density $\rho_0(\mathbf{x})$ and initial action $S_0(\mathbf{x})$) are defined at the initial time.

In contrast, we have:

Definition 2 (Discerned prepared Particle) - A classical particle is said to be *discerned prepared*, if one knows, at the initial time, its position \mathbf{x}_0 and velocity \mathbf{v}_0 .

The notion of indiscernibility that we introduced does not depend on the observer's knowledge, but is related to the mode of preparation of the particle.

Let us consider N indiscerned particles, that is to say N identical particles prepared in the same way, each with the same initial density $\rho_0(\mathbf{x})$ and the same initial action $S_0(\mathbf{x})$, subject to the same potential field $V(\mathbf{x})$ and which will have independent behaviors. This is particularly the case of identical classical particles without mutual interaction and prepared the same way. It is also the case of identical classical particles such as electrons, prepared in the same way and which, although they may interact, will have independent behaviors if they are generated one by one in the system.

We called these particles indiscerned, and not indistinguishable, because if we knew their initial positions, their trajectories would be known.

The difference between discerned and indiscerned particles depends on the preparation style. A device prepares either discerned or indiscerned particles. By way of example a tennis ball machine randomly launches balls in different directions. Therefore it prepares some indiscerned particles; only the characteristics of the balls' beams are known: probability of presence and velocity (action). A tennis player plunged into complete darkness that uses this machine knows only the presence probability of balls. However it is possible to discern indiscerned particles, if we knew their initial positions. This is what happens during the day: the tennis player is able to make successive measurements of the ball position by watching it. In this case, the player is able to plan the trajectory. It is important to note that without measurements, the balls remain indiscerned. In this specific case, the position measurement changes neither the state of the particle nor its trajectories. This is not always the case in quantum mechanics. It is therefore easy for the observer to identify the indistinguishability of indiscerned particles. However the tennis ball machine still produces indiscerned particles. A shotgun that fires a number of small spherical pellets also produces a beam of indiscerned particles. The positions of the pellets are unknown, only their probability densities are known as well as their velocities. If the precision of the shotgun

is very high and if one uses a bullet (instead of pellets), the initial position \mathbf{x}_0 of the bullet and its velocity \mathbf{v}_0 are known with exactitude. Therefore the bullet is a discerned prepared particle. The trajectories of the bullets will be always the same. How the particles are prepared is fundamental.

Based on the previous definitions, we may state the following:

1. An indiscerned prepared particle whose initial position x_0 is also known is a discerned prepared particle.
2. An indiscerned prepared particle whose initial probability density $\rho_0(x)$ is equal to a Dirac distribution $\rho_0(x) = \delta(x - x_0)$ is a discerned prepared particle.

This means that the indiscerned particles can be distinguishable. Furthermore, in their enumerations indiscerned particles have the same properties that are usually granted to indistinguishable particles. Thus, if we select N identical particles at random from the initial density $\rho_0(\mathbf{x})$, the various permutations of the N particles are strictly equivalent and correspond, as for indistinguishable particles, to only one configuration. In this framework, the Gibbs paradox is no longer paradoxical as it applies to N indiscerned particles whose different permutations correspond to the same configuration as for indistinguishable particles. This means that if X is the coordinate space of an indiscerned particle, the true configuration space of N indiscerned particles is not X^N but rather X^N/S_N where S_N is the permutation group.

For indiscerned particles, we have the following theorem:

THEOREM 1 - The probability density $\rho(\mathbf{x}, t)$ and the action $S(\mathbf{x}, t)$ of classical particles prepared in the same way, with initial density $\rho_0(\mathbf{x})$, with the same initial action $S_0(\mathbf{x})$, and evolving in the same potential $V(\mathbf{x})$, are solutions to the **statistical Hamilton-Jacobi equations**:

$$\frac{\partial S(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\nabla S(\mathbf{x}, t))^2 + V(\mathbf{x}) = 0 \quad (18)$$

$$S(\mathbf{x}, 0) = S_0(\mathbf{x}) \quad (19)$$

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \text{div} \left(\rho(\mathbf{x}, t) \frac{\nabla S(\mathbf{x}, t)}{m} \right) = 0 \quad (20)$$

$$\rho(\mathbf{x}, 0) = \rho_0(\mathbf{x}). \quad (21)$$

Let us recall that the velocity field is $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\nabla S(\mathbf{x}, t)}{m}$ and that the Hamilton-Jacobi equation (18) is not coupled to the continuity equation (20).

The difference between discerned and indiscerned particles will provide a simple explanation to the "recipes" denounced by Greiner et al.²⁵ that are commonly presented in manuals on classical statistical mechanics. However, as we have seen, this is not a principle that must be added. The nature of this discernability of the

particle depends on the preparation conditions of the particles, whether discerned or indiscerned.

Can we define an action for a discerned particle in a potential field $V(\mathbf{x})$? Such an action should depend only on the starting point \mathbf{x}_0 , the initial velocity \mathbf{v}_0 and the potential field $V(\mathbf{x})$.

THEOREM 2 - *If $\xi(t)$ is the classical trajectory in the field $V(\mathbf{x})$ of a particle with the initial position \mathbf{x}_0 and with initial velocity \mathbf{v}_0 , then the function*

$$S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0) = m \frac{d\xi(t)}{dt} \cdot \mathbf{x} + g(t) \quad (22)$$

where $\frac{dg(t)}{dt} = -\frac{1}{2}m\left(\frac{d\xi(t)}{dt}\right)^2 - V(\xi(t)) - m\frac{d^2\xi(t)}{dt^2} \cdot \xi(t)$, is called **the deterministic action**, and is a solution to deterministic Hamilton-Jacobi equations:

$$0 = \frac{\partial S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)}{\partial t} \Big|_{\mathbf{x}=\xi(t)} + \frac{1}{2m} (\nabla S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0))^2 \Big|_{\mathbf{x}=\xi(t)} + V(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\xi(t)} \quad (23)$$

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = \frac{\nabla S(\xi(t), t; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)}{m} \quad (24)$$

$$S(\mathbf{x}, 0; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0) = m\mathbf{v}_0\mathbf{x} \text{ and } \xi(0) = \mathbf{x}_0. \quad (25)$$

The deterministic action $S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$ satisfies the Hamilton-Jacobi equations only along the trajectory $\xi(t)$. The interest of such an action related to a single localized trajectory is above all theoretical by proposing a mathematical framework for the discerned particle. This action will take on a meaning in the following section where we show that it corresponds to the limit of the wave function of a quantum particle in a coherent state when one makes the Planck constant h tend to 0.

As for the Hamilton-Jacobi action, the deterministic action only depends on the initial conditions $(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$, the "efficient causes". In the end, we have three actions in classical mechanics, an epistemological action (the Euler-Lagrange action $S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)$) and two ontological actions, the Hamilton-Jacobi action $S(\mathbf{x}, t)$ for the indiscerned particles and the deterministic action $S(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$ for the discerned particles.

V. THE TWO LIMITS OF THE SCHRÖDINGER EQUATION

Let us consider the case semi-classical where the wave function $\Psi(\mathbf{x}, t)$ is a solution to the Schrödinger equation :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V(\mathbf{x}, t) \Psi \quad (26)$$

$$\Psi(\mathbf{x}, 0) = \Psi_0(\mathbf{x}). \quad (27)$$

With the variable change $\Psi(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)} \exp(i\frac{S^{\hbar}(\mathbf{x}, t)}{\hbar})$, the Schrödinger equation

can be decomposed into Madelung equations²⁶ (1926):

$$\frac{\partial S^{\hbar}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{1}{2m} (\nabla S^{\hbar}(\mathbf{x}, t))^2 + V(\mathbf{x}, t) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \sqrt{\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)}}{\sqrt{\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)}} = 0 \quad (28)$$

$$\frac{\partial \rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \text{div} \left(\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t) \frac{\nabla S^{\hbar}(\mathbf{x}, t)}{m} \right) = 0 \quad (29)$$

with initial conditions:

$$\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, 0) = \rho_0^{\hbar}(\mathbf{x}) \quad \text{and} \quad S^{\hbar}(\mathbf{x}, 0) = S_0^{\hbar}(\mathbf{x}). \quad (30)$$

We consider two cases depending on the preparation of the particles^{4,5}.

Definition 3 (Semi-Classical indiscerned particle)

- *A quantum particle is said to be semi-classical indiscerned prepared if its initial probability density $\rho_0^{\hbar}(\mathbf{x})$ and its initial action $S_0^{\hbar}(\mathbf{x})$ are regular functions $\rho_0(\mathbf{x})$ and $S_0(\mathbf{x})$ not depending on \hbar .*

It is the case of a set of non-interacting particles all prepared in the same way: a free particle beam in a linear potential, an electronic or C_{60} beam in the Young's slits diffraction, or an atomic beam in the Stern and Gerlach experiment.

Definition 4 (Semi-Classical discerned particle) -

- *A quantum particle is said to be semi-classical discerned prepared if its initial probability density $\rho_0^{\hbar}(\mathbf{x})$ converges, when $\hbar \rightarrow 0$, to a Dirac distribution and if its initial action $S_0^{\hbar}(\mathbf{x})$ is a regular function $S_0(\mathbf{x})$ not depending on \hbar .*

This situation occurs when the wave packet corresponds to a quasi-classical coherent state, introduced in 1926 by Schrödinger²⁷. The field quantum theory and the second quantification are built on these coherent states²⁸. The existence for the hydrogen atom of a localized wave packet whose motion is on the classical trajectory (an old dream of Schrödinger's) was predicted in 1994 by Bialynicki-Birula, Kalinski, Eberly, Buchleitner and Delande²⁹⁻³¹, and discovered recently by Maeda and Gallagher³³ on Rydberg atoms.

A. Semi-Classical indiscerned quantum particles

THEOREM 3^{4,5} *For semi-classical indiscerned quantum particles, the probability density $\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$ and the action $S^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$, solutions to the Madelung equations (28)(29)(30), converge, when $\hbar \rightarrow 0$, to the classical density $\rho(\mathbf{x}, t)$ and the classical action $S(\mathbf{x}, t)$, solutions to the statistical Hamilton-Jacobi equations (18)(19)(20)(21).*

We give some indications on the demonstration of this theorem and we propose its interpretation. Let us consider the case where the wave function $\Psi(\mathbf{x}, t)$ at time

t is written as a function of the initial wave function $\Psi_0(\mathbf{x})$ by the Feynman paths integral²¹ (16). For a semi-classical indiscerned quantum particle, the wave function is written $\Psi(\mathbf{x}, t) = F(t, \hbar) \int \sqrt{\rho_0(\mathbf{x}_0)} \exp(\frac{i}{\hbar}(S_0(\mathbf{x}_0) + S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0))) d\mathbf{x}_0$. The theorem of the stationary phase shows that, if \hbar tends towards 0, we have $\Psi(\mathbf{x}, t) \sim \exp(\frac{i}{\hbar} \min_{\mathbf{x}_0} (S_0(\mathbf{x}_0) + S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)))$, that is to say that the quantum action $S^h(\mathbf{x}, t)$ converges to the function

$$S(\mathbf{x}, t) = \min_{\mathbf{x}_0} (S_0(\mathbf{x}_0) + S_{cl}(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}_0)) \quad (31)$$

which is the solution to the Hamilton-Jacobi equation (18) with the initial condition (19). Moreover, as the quantum density $\rho^h(\mathbf{x}, t)$ satisfies the continuity equation (29), we deduce, since $S^h(\mathbf{x}, t)$ tends towards $S(\mathbf{x}, t)$, that $\rho^h(\mathbf{x}, t)$ converges to the classical density $\rho(\mathbf{x}, t)$, which satisfies the continuity equation (20). We obtain both announced convergences.

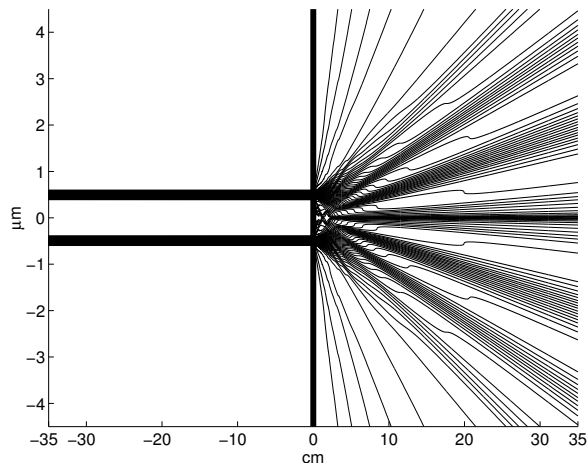


FIG. 4. 100 electron trajectories for the Jönsson experiment.

For a semi-classical indiscerned quantum particle, the Madelung equations converge to the statistical Hamilton-Jacobi equations, which correspond to indiscerned classical particles. We use now the interpretation of the statistical Hamilton-Jacobi equations to deduce the interpretation of the Madelung equations. For these indiscerned classical particles, the density and the action are not sufficient to describe a classical particle. To know its position at time t , it is necessary to know its initial position. It is logical to do the same in quantum mechanics. We consider this indiscerned quantum particle as the classical particle.

We conclude that a *semi-classical indiscerned quantum particle* is not completely described by its wave function. It is necessary to add its initial position and it becomes natural to introduce the de Broglie-Bohm interpretation^{1,36}. In this interpretation, the two first postulates of quantum mechanics, describing the quantum state and its evolution, must be completed. At initial time $t = 0$, the state of the particle is given by the initial wave function $\Psi_0(\mathbf{x})$ (a wave packet) and its initial

position $\mathbf{X}(0)$; it is the new first postulate. The second new postulate gives the evolution on the wave function and on the position. For a single, spin-less particle in a potential $V(\mathbf{x})$, the evolution of the wave function is given by the usual Schrödinger equation (26)(27) and the evolution of the particle position is given by

$$\frac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \frac{1}{m} \nabla S^h(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(t)}. \quad (32)$$

In the case of a particle with spin, as in the Stern and Gerlach experiment, the Schrödinger equation must be replaced by the Pauli or Dirac equations.

The other quantum mechanics postulates which describe the measurement are not necessary. One can demonstrate that the three postulates of measurement can be explained on each example; see the double-slit, Stern-Gerlach and EPR-B experiments³⁴. These postulates are replaced by a single one, the "quantum equilibrium hypothesis", that describes the interaction between the initial wave function $\Psi_0(\mathbf{x})$ and the probability distribution of the initial particle position $\mathbf{X}(0)$:

$$P[\mathbf{X}(0) = \mathbf{x}] = |\Psi_0(\mathbf{x})|^2. \quad (33)$$

One deduces that for all times

$$P[\mathbf{X}(t) = \mathbf{x}] = |\Psi(\mathbf{x}, t)|^2. \quad (34)$$

This is the "equivariance" property of the $|\Psi(\mathbf{x}, t)|^2$ probability distribution³⁵ which yields the Born probabilistic interpretation. Let us note the minimality of the de Broglie-Bohm interpretation.

Figure 4 shows a simulation of the de Broglie-Bohm trajectories in the double slit experiment of Jönsson³⁷ where an electron gun emits electrons one by one through a hole with a radius of a few micrometers. The electrons, prepared similarly, are represented by the same initial wave function, but not by the same initial position. In the simulation, these initial positions are randomly selected in the initial wave packet. We have represented only the quantum trajectories through one of two slits.

Figure 5 shows the 100 previous trajectories when the Planck constant is divided by 10, 100, 1000 and 10000 respectively. We obtain, when \hbar tends to 0, the convergence of quantum trajectories to classical trajectories.

B. Semi-Classical discerned quantum particles

The convergence study of the semi-classical discerned quantum particle is mathematically very difficult. We only study the example of a coherent state where an explicit calculation is possible.

For the two dimensional harmonic oscillator, $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{x}^2$, coherent states are built³² from the initial wave function $\Psi_0(\mathbf{x})$ which corresponds to the density and initial action $\rho_0^h(\mathbf{x}) = (2\pi\sigma_h^2)^{-1} e^{-\frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)^2}{2\sigma_h^2}}$ and $S_0(\mathbf{x}) = S_0^h(\mathbf{x}) = m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{x}$ with $\sigma_h = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$. Here,

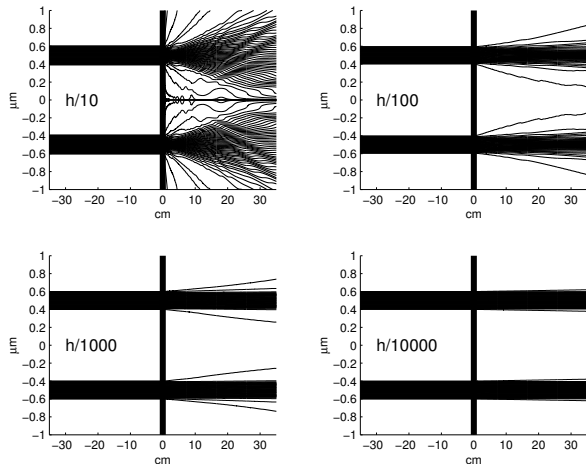


FIG. 5. Convergence of 100 electron trajectories when \hbar is divided by 10, 100, 1 000 and 10 000.

\mathbf{v}_0 and \mathbf{x}_0 are constant vectors and independent from \hbar , but σ_{\hbar} will tend to 0 as \hbar . With initial conditions, the density $\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$ and the action $S^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$, solutions to the Madelung equations (28)(29)(30), are equal to ³²: $\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t) = (2\pi\sigma_{\hbar}^2)^{-1} e^{-\frac{(\mathbf{x}-\xi(t))^2}{2\sigma_{\hbar}^2}}$ and $S^{\hbar}(\mathbf{x}, t) = +m\frac{d\xi(t)}{dt} \cdot \mathbf{x} + g(t) - \hbar\omega t$, where $\xi(t)$ is the trajectory of a classical particle evolving in the potential $V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}m\omega^2\mathbf{x}^2$, with \mathbf{x}_0 and \mathbf{v}_0 as initial position and velocity and $g(t) = \int_0^t (-\frac{1}{2}m(\frac{d\xi(s)}{ds})^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\xi(s)^2)ds$.

THEOREM 4 ^{4,5}- For the harmonic oscillator, when $\hbar \rightarrow 0$, the density $\rho^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$ and the action $S^{\hbar}(\mathbf{x}, t)$ converge to

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x}-\xi(t)) \quad \text{and} \quad S(\mathbf{x}, t) = m\frac{d\xi(t)}{dt} \cdot \mathbf{x} + g(t) \quad (35)$$

where $S(\mathbf{x}, t)$ and the trajectory $\xi(t)$ are solutions to the deterministic Hamilton-Jacobi equations (23)(24)(25).

Therefore, the kinematic of the wave packet converges to the single harmonic oscillator described by $\xi(t)$, which corresponds to a discerned classical particle. It is then possible to consider, unlike for the semi-classical indiscerned particles, that the wave function can be viewed as a single quantum particle. Then, we consider this discerned quantum particle as the classical particle. The *semi-classical discerned quantum particle* is in line with the Copenhagen interpretation of the wave function, which contains all the information on the particle. A natural interpretation was proposed by Schrödinger²⁷ in 1926 for the coherent states of the harmonic oscillator: the quantum particle is a spatially extended particle, represented by a wave packet whose center follows a classical trajectory. In this interpretation, the first two usual postulates of quantum mechanics are maintained. The others are not necessary. Then, the particle center is the mean

value of the position ($X(t) = \int x|\Psi(\mathbf{x}, t)|^2 dx$) and satisfies the Ehrenfest theorem⁴¹. Let us note the minimality of the Schrödinger interpretation.

VI. THE NON SEMI-CLASSICAL CASE

The de Broglie-Bohm and Schrödinger interpretations correspond to the semi-classical approximation. They correspond to the two interpretations proposed in 1927 at the Solvay congress⁴² by de Broglie and Schrödinger. But there exist situations in which the semi-classical approximation is not valid. It is in particular the case of state transitions in a hydrogen atom. Indeed, since Delmelt's experiment⁴³ in 1986, the physical reality of individual quantum jumps has been fully validated. The semi-classical approximation, where the interaction with the potential field can be described classically, is no longer possible and it is necessary to use electromagnetic field quantization since the exchanges occur photon by photon. In this situation, the Schrödinger equation cannot give a deterministic interpretation and the statistical Born interpretation is the only valid one. It was the third interpretation proposed in 1927 at the Solvay congress. These three interpretations are considered by Einstein in one of his last articles (1953), "*Elementary Reflexion on Interpreting the Foundations of Quantum Mechanics*" in a homage to Max Born⁴⁴:

"The fact that the Schrödinger equation associated with the Born interpretation does not lead to a description of the "real states" of an individual system, naturally incites one to find a theory that is not subject to this limitation. Up to now, the two attempts have in common that they conserve the Schrödinger equation and abandon the Born interpretation. The first one, which marks de Broglie's comeback, was continued by Bohm.... The second one, which aimed to get a "real description" of an individual system and which might be based on the Schrödinger equation is very late and is from Schrödinger himself. The general idea is briefly the following : the function ψ represents in itself the reality and it is not necessary to add it to Born's statistical interpretation.[...] From previous considerations, it results that the only acceptable interpretation of the Schrödinger equation is the statistical interpretation given by Born. Nevertheless, this interpretation doesn't give the "real description" of an individual system, it just gives statistical statements of entire systems."

Thus, Einstein retained de Broglie's and Schrödinger's attempts to interpret the "real states" of a single system: these are our two semi-classical quantum particles (indiscerned and discerned). But as de Broglie and Schrödinger retained the Schrödinger equation, Einstein, who considered this equation as fundamentally statistical, refuted each of their interpretations. We will see that he went too far in his rebuttal.

The novelty of our approach is to consider that each of these three interpretations depends on the prepara-

tion of the particles. The de Broglie-Bohm interpretation concerns the semi-classical indiscerned quantum particles, the Schrödinger interpretation concerns the semi-classical discerned quantum particles, and the Born interpretation concerns the statistic of the semi-classical indiscerned quantum particles, but also the statistic of the transitions in a hydrogen atom.

This does not mean that we should abandon determinism and realism, but that at this scale, Schrödinger's statistical wave function is not the effective equation to obtain an individual behavior of a particle, in particular to investigate the instant of transition in a deterministic manner. An individual interpretation needs to use the creation and annihilation operators of quantum field theory, but this interpretation still remains statistical.

We assume that it is possible to construct a deterministic quantum field theory that extends to the non semi-classical interpretation of the double semi-classical preparation. First, as shown by de Muynck¹⁰, we can construct a theory with discerned (labeled) creation and annihilation operators in addition to the usual indiscerned creation and annihilation operators. But, to satisfy the determinism, it is necessary to search, at a lower scale, the mechanisms that allow the emergence of the creation operator.

VII. CONCLUSION

The introduction into classical mechanics of the concepts of indiscerned particles verifying the statistical Hamilton-Jacobi equations and of discerned particles verifying the deterministic Hamilton-Jacobi equations can provide a simple answer to the Gibbs paradox of classical statistical mechanics. Furthermore, the distinction between the Hamilton-Jacobi and Euler-Lagrange actions, based on the Minplus path integral makes it easier to understand the principle of least action. The study of the convergence of the Madelung equations when \hbar tends to 0 leads us to consider the following two cases:

1. Semi-classical indiscerned quantum particles, which are prepared in the same way and without mutual interaction, for which the evolution equations converge to the statistical Hamilton-Jacobi equations of indiscerned classical particles. The

wave function is therefore not sufficient to represent quantum particles and it is mandatory to add their initial positions, just as for indiscerned classical particles. Subsequently, the interpretation of the de Broglie-Bohm pilot wave is necessary.

2. The semi-classical discerned quantum particle for which the evolution equations converge to the deterministic Hamilton-Jacobi equations of a discerned classical particle. The interpretation of the Broglie-Bohm pilot wave is no longer necessary because the wave function is sufficient to represent the particles as in the Copenhagen interpretation. Subsequently, the Schrödinger interpretation where the wave function represents an extended particle, is the most natural.

We can consider the previous interpretation which depends on a double preparation of the quantum particle (discerned or non-discerned) as a response to the "theory of the double solution" that Louis de Broglie was seeking in 1927. We call it "the theory of the double preparation".

In the case where the semi-classical approximation is no longer valid, the interpretation needs to use the creation and annihilation operators of the quantum field. W. M. de Muynck¹⁰ shows that is possible to construct a theory with discerned (labeled) creation and annihilation operators in addition to the usual non-discerned creation and annihilation operators. But, to satisfy the determinism, it is necessary to search, at a lower scale, the mechanisms that allow the emergence of the creation operator.

This interpretation of quantum mechanics following the preparation of the system can explain the discussions between the founding fathers, in particular the discussion of the Solvay Congress of 1927. Indeed, one may consider that the misunderstanding between them may have come from the fact that they each had an element of truth: Louis de Broglie's pilot-wave interpretation for the semi-classical indiscerned particle, Schrödinger's interpretation for the semi-classical discerned particle and Born's interpretation for the non-semi-classical case. But each applied his particular case to the general case and they consequently made mutually incompatible interpretations.

* michel.gondran@polytechnique.org

† alexandre.gondran@enac.fr

¹ de Broglie, L.: La mécanique ondulatoire et la structure atomique de la matière et du rayonnement. J. de Phys. 8, 225-241 (1927).

² de Broglie, L., Andrade e Silva, J.L.: La Réinterprétation de la mécanique ondulatoire. Gauthier-Villars (1971).

³ de Broglie, L. : Une interprétation causale et non linéaire de la mécanique quantique: la théorie de la double solu-

tion. Gauthier-Villars (1956); English translation, Elsevier, Amsterdam (1960).

⁴ Gondran, M., Gondran, A.: Discerned and non-discerned particles in classical mechanics and convergence of quantum mechanics to classical mechanics. Annales de la Fondation Louis de Broglie, 36, 117-135 (2011).

⁵ Gondran, M., Gondran, A.: The two limits of the Schrödinger equation in the semi-classical approximation : discerned and non-discerned particles in classical mechan-

- ics. Foundations of Probability and Physics-6, AIP Conf. Proc. 1424,111-115 (2012).
- ⁶ Gondran, M.: Analyse MinPlus. C. R. Acad. Sci. Paris 323, 371-375 (1996).
 - ⁷ Gondran, M., Minoux, M.: Graphs, Dioïds and Semirings: New models and Algorithms. Springer, Operations Research/Computer Science Interfaces, chap.7 (2008).
 - ⁸ Maslov, V.P., Samborski, S.N.: Idempotent Analysis. Advances in Soviet Mathematics, 13, American Math Society, Providence (1992).
 - ⁹ Kolokoltsov, V.N., Maslov, V.P.: Idempotent Analysis and its applications. Klumer Acad. Publ. (1997).
 - ¹⁰ de Muynck, W.M.: Distinguishable-and Indistinguishable-Particle; Descriptions of Systems of Identical Particles. International Journal of Theoretical Physics 14, n° 5, 327-346 (1975).
 - ¹¹ de Maupertuis, P.L.: Accord de différentes lois de la nature qui avaient jusqu'ici paru incompatibles. Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, p.417-426 (Paris,1744); reprint in: Oeuvres, 4, 1-23 Reprografischer Nachdruck der Ausg. Lyon (1768).
 - ¹² Poincaré, H.: La Science et l'Hypothèse. Flammarion, (1902); Translated in: The Foundations of Sciences: Science and Hypothesis, The value of Science, Science and Method. New York: Science Press (1913).
 - ¹³ Euler, L.: Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minive Proprietate Gaudentes. Bousquet, Lausanne et Geneva (1744). Reprint in: Leonhardi Euleri Opera Omnia: Series I vol 24 C. Cartheodory (ed.) Orell Fuessli, Zurich (1952).
 - ¹⁴ Lagrange, J.L.: Mécanique Analytique. Gauthier-Villars, 2nd ed., Paris (1888); translated in: Analytic Mechanics, Klumer Academic, Dordrecht (2001).
 - ¹⁵ Hamilton, W. R.: On a general method in dynamics, by which the study of the motions of all free systems of attracting or repelling points is reduced to the search and differentiation of one central Relation or characteristic Function. Philos. Trans; R. Soci. PartII, 247-308 (1834).
 - ¹⁶ Goldstein, H.: Classical mechanics. Addison-Wesley (1966).
 - ¹⁷ Butterfield, J.: David Lewis Meets Hamilton and Jacobi. in: Philosophy of Science Assoc; 18th Biennial Mtg-PSA (2002).
 - ¹⁸ Landau, L.D., Lifshitz, E.M.: Mechanics, Course of Theoretical Physics. chap.1, Buttreworth-Heinemann, London (1976).
 - ¹⁹ Lions, P. L.: Generalized Solutions of Hamilton-Jacobi Equations. Pitman (1982).
 - ²⁰ Evans, L. C.: Partial Differential Equations, p.123-124. Graduate Studies in Mathematics 19, American Mathematical Society (1998).
 - ²¹ Feynman, R., Hibbs, A.: Quantum Mechanics and Integrals. McGraw-Hill (1965).
 - ²² Bacry, H.; Introduction aux concepts de la Physique Statistique. Ellipses, Paris (1992).
 - ²³ Landé, A.: New Foundations of Quantum Mechanics, p. 68. Cambridge (1965).
 - ²⁴ Leinaas, J. M.; Myrheim, J.: On the Theory of Identical Particles. Il Nuovo Cimento, 37 B, 1-23 (1977).
 - ²⁵ Greiner, W., Neise, L., Stöcker, H.: Thermodynamics and Statistical Mechanics. Springer (1999).
 - ²⁶ Madelung, E.: Quantentheorie in hydrodynamischer Form. Zeit. Phys. 40, 322-6 (1926).
 - ²⁷ Schrödinger, E.: Der stetige bergang von der Mikro-zur Makromechanik. Naturwissenschaften 14, 664-666 (1926).
 - ²⁸ Glauber, R. J.: in: Quantum Optics and Electronics, Les Houches Lectures 1964, C. deWitt, A. Blandin and C. Cohen-Tanoudji eds., Gordon and Breach, New York (1965).
 - ²⁹ Bialynicki-Birula, I., Kalinski, M., Eberly, J. H.: Lagrange Equilibrium Points in Celestial Mechanics and Nonspreading Wave Packets for Strongly Driven Rydberg Electrons. Phys. Rev. Lett. 73, 1777 (1994).
 - ³⁰ Buchleitner, A., Delande, D.: Non-dispersive electronic wave packets in multiphoton processus. Phys. Rev. Lett. 75, 1487 (1995).
 - ³¹ Buchleitner, A., Delande, D., Zakrzewski, J.: Non-dispersive wave packets in periodically driven quantum systems. Physics Reports 368, 409-547 (2002).
 - ³² Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., Laloë, F.: Quantum Mechanics. Wiley, New York (1977).
 - ³³ Maeda, H., Gallagher, T.F.: Non dispersing Wave Packets. Phys. Rev. Lett. 92, 133004-1 (2004).
 - ³⁴ Gondran, M., Gondran, A., Kenoufi, A.: Decoherence time and spin measurement in the Stern-Gerlach experiment. Foundations of Probability and Physics-6 (Växjö, Sweden, Juin 2011), AIP Conf. Proc. 1424, pp.116-120 (2012).
 - ³⁵ Dürr, D., Golstein, S., Zanghi, N.: Quantum equilibrium and the origin of absolute uncertainty. J. Stat. Phys. 67, 843-907 (1992).
 - ³⁶ Bohm, D.: A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables. Phys. Rev. 85, 166-193 (1952).
 - ³⁷ Jönsson, C.: Elektroneninterferenzen an mehreren künstlich hergestellten Feinspalten. Z. Phys. 161, 454-474 (1961), English translation: Electron diffraction at multiple slits. Am. J. Phys. 42, 4-11 (1974).
 - ³⁸ Gondran, M., Gondran, A.: Numerical simulation of the double-slit interference with ultracold atoms. Am. J. Phys. 73, 507-515 (2005).
 - ³⁹ Bohm, D., Hiley, B.J.: The Undivided Universe. Routledge, London and New York (1993).
 - ⁴⁰ Holland, P.R.: The quantum Theory of Motion. Cambridge University Press (1993).
 - ⁴¹ Ehrenfest, P.: Bemerkung über die angenäherte Gültigkeit der klassischen Mechanik innerhalb der Quantenmechanik. Zeitschrift für Physik 45 (7-8), 455-457 (1927).
 - ⁴² Bacciagaluppi, G., Valentini, A.: Quantum Theory at the Crossroads: Reconsidering the 1927 Solvay Conference. Cambridge University Press (2009).
 - ⁴³ Nagournay, W., Sandberg, J., Dehmelt, H.: Shelved optical electron amplifier: Observation of quantum jumps. Phys. Rev. Lett.56, 2797-2799 (1986).
 - ⁴⁴ Einstein, A.: Elementary Reflexion on Interpreting the Foundations of Quantum Mechanics . in: Scientific Papers presented to Max Born. Edimbourg, Olivier and Boyd (1953).